פיתרון תרגיל בית 3 - התמרת פוריה

תרגיל 1. נתונה הפונקציה
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & ;\quad n\le x<n+1,\quad n=0,1,2,\dots\\ 0 & ;\quad \text{אח'}\end{cases}$$

א. שרטט גרף של פונקציה זו ובדוק כי היא שייכת למרחב $G(\mathbb{R})$.

ב. חשב את התמרת פוריה, $F(w)$, של $f(x)$.

ג. בדוק אם $F(w)$ אינטגרבילית בהחלט על $\mathbb{R}$.

ד. עבור הפונקציה $g(x)=\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}F(w)e^{iwx}dw$

רשום תבנית המתארת בצורה מפורשת את ערכי הפונקציה עבור כל ה-x-ם הממשיים .

ה. חשב $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(w)|^2dw$.

ו. חשב $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{F(w)}{1+w^2}dw$.

תרגיל 2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי $F(w)$ התמרת פוריה של $f(x)$.
נניח ש- $F(w)$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$ ומקיימת את המשוואה :

$$F(w)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(w-x)e^{-x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{-|w-x|}}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$$

מצא את $f(x)$.

תרגיל 3. ע"י שימוש בהתמרת פוריה של :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\quad 0<x\le a\\ -1 & ;\quad -a\le x\le 0\\ 0 & ;\quad \text{אח'}\end{cases}$$

חשב את האינטגרל :

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\,\sin bx\,dx$$

תרגיל 4. נגדיר $\varphi(x) = sinc\, x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ בקצור נרשום $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

בהנחה כי עבור $x = 0$ הערך של $\varphi(x)$ מוגדר כלעיל , כלומר $\varphi(0) = 1$,

נסמן
$$h_a(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & ; \quad \text{אח'} \end{cases}$$

ידוע כי :

$$h_a(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{a}{\pi} \cdot \varphi(aw)$$

$$\varphi(ax) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2a} \cdot h_a(w)$$

א. (i) הוכח כי $\varphi(x)$ רציפה על $\mathbb{R}$ ושואפת ל-0 כאשר $x \to \pm\infty$.

(ii) שרטט גרף של $\varphi(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציות :

$$\varphi\big(\pi(x-n)\big) = \frac{\sin\big(\pi(x-n)\big)}{\pi(x-n)} \quad , \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

מהוות מערכת אורתונורמלית על $\mathbb{R}$ אם מגדירים $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

ג. תהי $f(x)$ פונקציה על $\mathbb{R}$ בעלת התמרת פוריה

$$\widehat{f}(w) = \begin{cases} w^2 & ; \quad -\pi \leq w \leq \pi \\ 0 & ; \quad \text{אח'} \end{cases}$$

הצג את $f(x)$ באמצעות טור לפי המערכת $\left\{\varphi\big(\pi(x-n)\big)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

הערה: הנח במקרה זה ,גם ללא הוכחה פורמלית, כי ניתן (ורצוי) להשתמש בתכונת הליניאריות של התמרת פוריה עבור המקרה האינסופי.

ד. (i) חשב את ערכי $f(x)$ עבור $x = n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

(ii) שרטט גרף של $f(x)$.

ה. חשב

(i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$.

תרגיל 5. בתרגיל זה נוכיח תכונת אי-ודאות של התמרת פוריה.
תהי פונקציה $f(t)$ כך ש :

$$f(t), f^2(t), tf(t), f'(t) \in G(\mathbb{R})$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} f(t) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = K = 1$$

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

נגדיר "<u>מדד לרוחב</u>" של פונקציה ע"י :

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt$$

$$\Delta_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |wF(w)|^2 dw$$

א. הוכח : $\left|\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt\right|^2 \le 2\pi \cdot \Delta_t^2 \cdot \Delta_w^2$.

רמז: השתמש באי-שויון קושי שוורץ.

ב. הוכח : $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt = -\pi$.

רמז: אינטגרציה בחלקים.

ג. הסק כי $\frac{\pi}{2} \le \Delta_t^2 \cdot \Delta_w^2$, כלומר מכפלת מדדי הרוחב היא לפחות $\frac{\pi}{2}$.

ד. הסבר האם קיימת פונקציה $f(t)$ המקיימת בנוסף לעיל את :

$$f(t) = \begin{cases} |f(t)| \le 1 & ; \quad |x| \le 1 \\ f(t) = 0 & ; \quad |x| > 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(w) = \begin{cases} F(w) \le 1 & ; \quad |w| \le 1 \\ F(w) = 0 & ; \quad |w| > 1 \end{cases}$$

ה. מצא את הפונקציות $f(t)$ עבורן מתקיים השויון $\frac{\pi}{2} = \Delta_t^2 \cdot \Delta_w^2$.
תזכורת: קיים שויון באי-שויון קושי-שוורץ אמ"ם הוקטורים תלויים ליניארית , כלומר $|(f,g)|^2 = ||f||^2 \cdot ||f||^2$ אמ"ם קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ קבוע כך ש: $f = \lambda g$.